Índice

Prólogo

El presente libro está diseñado para un curso de Álgebra Lineal, en modalidad trimestral. El trabajo está organizado como sigue.

El capítulo 1 es una introducción al estudio de Matrices $n \times m$ y Sistemas $n \times m$, con entradas y coeficientes reales, respectivamente. Se introducen las matrices elementales y las operaciones elementales por renglones, como requisito para el Algoritmo de Gauss-Jordan. Aplicando dicho algoritmo a la matriz aumentada de un sistema, se decide si éste es consistente. En tal caso, se calculan todas sus soluciones llevando a la matriz a su forma escalonada reducida por renglones. Se proporciona una breve introducción a la Programación Lineal.

El capítulo 2 es el caso $n \times n$. Ya que en la definición del determinante de una matriz $n \times n$ interviene el grupo simétrico en n símbolos, se inicia el capítulo con el estudio de dicho grupo. Además del Algoritmo de Gauss-Jordan para el cálculo del determinante, se proporcionan algoritmos recursivos para tal efecto: desarrollo de Laplace, desarrollo por un renglón fijo, desarrollo por una columna fija. El resultado principal de este capítulo es el Teorema Fundamental del Álgebra Lineal, llamado así por la gran variedad de resultados que a él se adjuntan, y por los resultados que de él emanan. Se obtiene la regla de Cramer, útil para sistemas $n \times n$ tales que el determinante de la matriz del sistema tenga determinante no nulo. El cálculo de la inversa de una matriz se hace ya sea por medio del cálculo de su adjunta, o bien por medio del Algoritmo de Gauss-Jordan.

El capítulo 3 proveé una introducción a la teoría de Categorías. Se presentan los conceptos de objetos, morfismos, monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos, objetos isomorfos, funtores, equivalencia de categorías. Se observa que una categoría importante es la de conjuntos:

Conjuntos

Sus objetos son los conjuntos, los morfismos son las funciones en el sentido usual, y los isomorfismos son las funciones biyectivas.

El capítulo 4 presenta a la categoría de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$:

Espacios/$\mathbb{R}$

En este capítulo se definen sus objetos y sus morfismos: los espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y las transformaciones lineales, respectivamente. Se proporcionan varios ejemplos, entre ellos al conjunto de soluciones de un sistema homogéneo, y al conjunto de soluciones en un intervalo I, de una ecuación diferencial de orden n, lineal homogénea, con coeficientes constantes. Se estudian los subespacios asociados a una transformación lineal: su núcleo y su imagen. Vista como subcategoría de **Conjuntos**, un morfismo en **Espacios**/$\mathbb{R}$ es: monomorfismo si y sólo si su núcleo es trivial; isomorfismo si y sólo si es biyectivo.

El capítulo 5 continua el estudio de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$, analizando la estructura interna de un espacio vectorial: generadores, independencia lineal, bases. Se identifica una subcategoría importante de la categoría **Espacios**/$\mathbb{R}$, los espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita:

FinEspacios/$\mathbb{R}$

Se obtienen los teoremas de la dimensión y de isomorfismo, el primero para transformaciones lineales y el segundo para espacios vectoriales de dimensión finita. Se estudia la estructura algebraica del conjunto de transformaciones lineales entre dos espacios vectoriales, y se continuan los ejemplos concretos de espacios vectoriales modelados por matrices.

El capítulo 6 estudia el problema de cambio de bases en un espacio vectorial de dimensión finita, desde el punto de vista matricial.

El capítulo 7 estudia el problema de asociar una matriz a una transformación lineal entre dos espacios de dimensión finita, con respecto a bases dadas en el dominio y en el codominio. Además, se obtienen dos resultados importantes, uno de isomorfismo entre el espacio vectorial de las transformaciones lineales entre esos espacios vectoriales y una colección de matrices, y otro de equivalencia entre dos categorías, una de las cuales es la categoría **FinEspacios**/$\mathbb{R}$.

El capítulo 8 explota el espíritu de obtener ejemplos concretos de espacios vectoriales de dimensión finita, en esta ocasión a partir de una matriz dada: su espacio de columnas y su espacio de renglones. Se obtiene la equidimensionalidad de dichos espacios vectoriales. Se obtiene una base para el espacio de columnas, de nuevo usando el algoritmo de Gauss-Jordan.

El capítulo 9 aborda el estudio de valores propios, vectores propios, forma canónica de Jordan y formas cuadráticas. Se presenta la matriz exponencial de una matriz $n \times n$. Se hace una breve incursión al estudio de cónicas. Se estudian las formas cuadráticas definidas positivas, en función de los valores propios de su matriz simétrica asociada.

El capítulo 10 proporciona una introducción al problema de la descripción de las banderas y subespacios invariantes en $\mathbb{R}^n$. Dos vertientes son analizadas: base de Grobner de un subespacio, y vectores propios generalizados asociados a un valor propio. Se estudian las propiedades de la colección de subespacios invariantes de una transformación lineal.

El capítulo 11 es una recopilación de los enunciados equivalentes del Teorema Fundamental del Álgebra Lineal. Se hace una breve incursión a la Teoría de Matroides, con el fin de extender dicho teorema, usando el matroide vectorial.

Al final de cada capítulo se proporciona una lista de ejercicios. Algunos de ellos son una extensión a la teoría proporcionada en el libro. En todo caso, es importante que el lector los intente todos ellos.

Se tomó la decisión de considerar esencialmente el estudio del Álgebra Lineal sobre $\mathbb{R}$. Esto obedece principalmente a dos razones. La primera, aunque el estudio del Álgebra Lineal sobre $\mathbb{C}$ es, en varios aspectos, similar a su estudio sobre $\mathbb{R}$, se require primero una introducción al estudio de $\mathbb{C}$. La segunda, el hecho de que el estudiante por lo general ha tenido contacto con los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Cuando se ha presentado la oportunidad, se usan los resultados expuestos en algunas aplicaciones: Programación Lineal (página 35); Ecuación Diferencial Lineal, Homogénea, con Coeficientes Constantes (página 105). Por otro lado, no se consideran los métodos numéricos asociados al Álgebra Lineal.

Se ha procurado, en la medida de lo posible, un balance entre las demostraciones y los ejemplos resueltos, de tal manera que el texto sirva de base tanto para un curso de ciencias, como para un curso de ingeniería. Si así conviene, se sugiere considerar los capítulos 3, 10, y 11, así como el teorema 7.4, únicamente como referencias. El término "categoría" se usa en el texto para expresar varios de los conceptos del Álgebra Lineal, desde un punto de vista más general. Para definir la categoría de Espacios Vectoriales sobre $\mathbb{R}$, se necesitan esencialmente dos conceptos: el de Espacio Vectorial sobre $\mathbb{R}$ (definición 4.1), y las Transformaciones Lineales (definición 4.3). En términos categóricos: objetos, y morfismos. En cualquier categoría, un concepto importante es el de isomorfismo. Para la subcategoría de Espacios Vectoriales de dimensión finita, el isomorfismo toma una forma muy simple (teorema 5.10).

No se pretende que el trabajo sea autocontenido, por lo que se sugiere al lector consultar la bibliografía presentada al final del mismo.